

I) FONCTION PRIMITIVE D'UNE FONCTION**1) Activités : Activité1**

1) Déterminer une fonction F qui admet pour fonction dérivée la fonction : $f(x) = x^2 + 2x + 3$

2) existe-t-il une autre fonction G tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); G'(x) = f(x) ?$$

3) combien Ya t'ils de onction H tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); H'(x) = f(x) ?$$

et donner une expression de toutes les fonctions primitives de h

Activité2 : Soient F une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I c'est-à-dire

$$(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$$

et G une fonction primitive de la fonction g sur l'intervalle I , α et β deux réels.

1- Montrer que $(\alpha F + \beta G)$ est une fonction primitive de la fonction $(\alpha f + \beta g)$ sur I .

2- Soient F_1 et F_2 deux fonctions primitives de la fonction f sur l'intervalle I ; Montrer que :

$$(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + \lambda)$$

où λ est un réel quelconque.

3- Démontrer que si f admet une fonction

primitive sur I et $x_0 \in I$; alors il existe une unique

2) Définition.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On appelle fonction **primitive**, ou primitive de f sur I , toute fonction F définie et **dérivable** sur I telle que : $(\forall x \in I) ; F'(x) = f(x)$

3) Propriétés.

Propriété1 : Toute fonction **continue** (dérivable) sur un intervalle I admet une primitive sur I .

Exemple : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x + 1 \text{ si } x \leq 1$$

$$f(x) = 2x - 1 \text{ si } x > 1$$

Montrer que la fonction f n'admet pas de primitive Sur $\mathbb{R}$

Propriété2: Soit F une primitive de f sur un intervalle I .

- L'ensemble des primitives de f sur l'intervalle I est l'ensemble des fonctions définies sur I par : $x \mapsto F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$
- En particulier, si $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, alors il existe une unique primitive de f sur I telle que: $F(a) = b$.

Propriété3: Soit F une primitive de f sur un intervalle I , alors G est une autre primitive de f sur l'intervalle I si et seulement si : $G(x) = F(x) + k$, où $k \in \mathbb{R}$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$

$$\text{par : } f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

1) Déterminer les fonctions primitives de la

fonction f sur $]0; +\infty[$

2) Déterminer la fonction primitive de la fonction f

sur $]0; +\infty[$ tel que : $F(1) = 3$

3) Propriétés de calculs sur les primitives.

Primitives des fonctions usuelles	
$f(x)$	$F(x)$
k	$k.x + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x^r / (r \in \mathbb{Q} - \{0; -1\})$	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + c$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$1 + \tan^2 x$	$\tan x + c$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$

- Soient u et v deux fonctions dérivables sur I . - U et V des primitives de u et v sur I	
$f(x)$	$F(x)$
$u(x) + v(x)$	$U(x) + V(x) + c$
$\lambda.u(x)$	$\lambda.U(x) + c$
$u' \times u$	$\frac{1}{2}u^2 + c$
$\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$-\frac{1}{u(x)} + c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + c$
$\frac{u'(x)}{\sqrt[n]{u(x)}^{n-1}}$	$n.\sqrt[n]{u(x)} + c$
$u' \times u^r / (r \in \mathbb{Q} - \{0; -1\})$	$\frac{u^{r+1}}{r+1} + c$

EXERCICES

Exercice 1:

Déterminer l'ensemble des primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I .

- 1) $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ sur $I = \mathbb{R}$.
- 2) $g : x \mapsto 3x^2 \times (x^3 - 1)^2$ sur $I = \mathbb{R}$.
- 3) $h : x \mapsto \frac{2x}{(x^2 - 3)^3}$ sur $I = [4; +\infty[$.
- 4) $g : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ sur $I = \mathbb{R}$.
- 5) $f : x \mapsto \tan^2(x)$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 2:

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3 - 3x^2 + 7}{(x-2)^2}$ définie sur $I = [3; +\infty[$.

- 1) Déterminer a, b et c de façon que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$$

- 2) Calculer les primitives de f sur $I = [3; +\infty[$.
- 3) En déduire la primitive F de f sachant que $F(3) = 1$.